Holomorph symplektische Mannigfaltigkeiten

Von Manfred Lehn

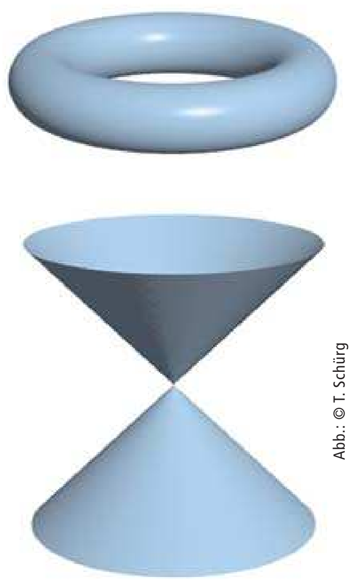

Abb.: © T. Schürg

Abb. 1: *Oben ein Torus (Mannigfaltigkeit) und unten ein Kegel (keine Mannigfaltigkeit).*

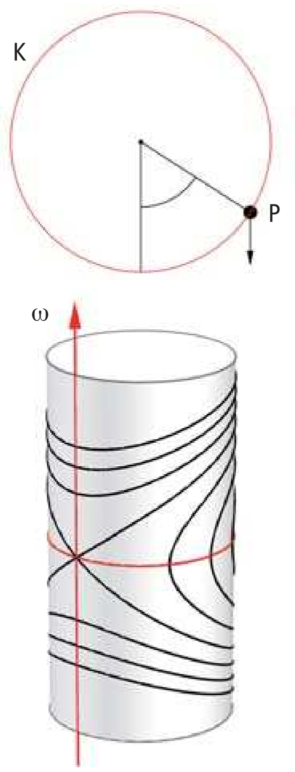

Abb.: © M. Lehn

Abb. 2: *Konfigurationsraum (oben) und Phasenraum (unten) eines Pendels.*

Der Begriff der Mannigfaltigkeit im engeren mathematischen Sinne geht auf Bernhard Riemann (1826-1866) zurück, der in seinem Habilitationsvortrag mit dem Titel „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrundeliegen" (Göttingen 1854) ein Programm skizzierte, wie man Geometrie auf höherdimensionalen und gekrümmten geometrischen Objekten betreiben könne.

Riemann kam für diese Programmskizze gänzlich ohne Formeln und Bilder aus. In den 150 Jahren, die seit Riemanns Vortrag vergangen sind, hat sich die mathematische Forschung explosionsartig entwickelt, und die Fach- und Formelsprache ist mehr denn je zu einer unzugänglichen Zaubersprache geworden. Wer heute über aktuelle mathematische Fragen für ein Laienpublikum schreiben will, muss über das bloße Vereinfachen des Gegenstands hinaus zu Bildern und Metaphern greifen, die die eigentlichen Fragen nicht wirklich erläutern können, aber vielleicht und mit etwas Glück eine vage Ahnung vom Reiz hinterlassen, den diese Fragen auf Eingeweihte ausüben.

Diese Entschuldigung vorausgeschickt, bezeichnet eine *Mannigfaltigkeit* ein geometrisches Objekt, das mit einer hinreichend starken Lupe betrachtet, flach aussieht. Eindimensionale Mannigfaltigkeiten sind etwa eine Gerade, ein Kreis, aber auch jede Kurve ohne Knicke und ohne Selbstüberschneidungen. Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten sind zum Beispiel eine Ebene, eine Kugeloberfläche oder die Oberfläche eines Schwimmreifs; in der mathematischen Terminologie handelt es sich bei Letzterem um einen Torus. Alle diese Flächen sehen von Nahem betrachtet flach aus. Dagegen wird die Spitze eines Doppel-Kegels immer spitz bleiben, egal wie nahe man sich der Spitze nähert: Der Kegel ist deshalb keine Mannigfaltigkeit (Abb. 1).

Die *Dimension* einer Mannigfaltigkeit bezeichnet die Anzahl der Freiheitsgrade, die ein Punkt hat, der sich auf der Mannigfaltigkeit bewegt, oder anders gesagt: die Anzahl der Koordinaten, die benötigt werden, um die Lage eines Punktes auf der Mannigfaltigkeit zu beschreiben. Drei-, vier- oder 20-dimensionale Mannigfaltigkeiten entziehen sich zwar der räumlichen Anschauung, können aber nach Einführung von Koordinaten genauso gut wie die oben gezeichneten Flächen untersucht werden.

Höherdimensionale Mannigfaltigkeiten sind keine esoterischen Objekte, sondern entstehen auf natürliche Weise bei der Modellierung schon von einfachsten physikalischen Systemen: Man braucht drei Koordinaten, um die *Lage* einer Punktladung, die sich in einem elektrischen Kraftfeld bewegt, zu beschreiben. Die möglichen Lagen bilden eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, den *Konfigurationsraum*. Aber der *Zustand* der Punktladung wird erst durch die zusätzliche Angabe der drei Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors vollständig beschrieben. Die möglichen Zustände bilden einen sechsdimensionalen *Phasenraum*. Einen etwas interessanteren Phasenraum, der der Einfachheit halber wieder zweidimensional sein wird, erhält man bei der Beschreibung eines idealen Pendels: Der Konfigurationsraum ist hier der Kreis K. Der Zustand wird aber erst durch die weitere Angabe der aktuellen Winkelgeschwindigkeit ω bestimmt und besteht daher aus dem Paar (P,ω): Der Punkt P liegt auf dem Kreis K, aber ω kann eine beliebige reelle Zahl sein. Der Zustandsraum ist folglich ein Zylinder. Die Dynamik des Pendels wird durch Bahnkurven auf diesem Zylinder beschrieben (Abb. 2).

Symplektische Mannigfaltigkeiten sind eine Unterklasse von Mannigfaltigkeiten mit spezifischen geometrischen Eigenschaften, so wie Schimpansen eine eigene Gattung in der Familie der Menschenaffen sind. Damit eine Mannigfaltigkeit symplektisch wird, muss sie mit einer zusätzlichen geometrischen Struktur versehen werden. Struktur bedeutet hier nicht, dass man andere Dinge in die Mannigfaltigkeit hineinlegt, vielmehr soll der umgebende Raum selbst an jeder Stelle bestimmte intrinsische Eigenschaften haben.

Ich will das anhand des Unterschieds zwischen *metrischen* und *symplektischen* Strukturen an einem einfachen Modell erläutern und betrachte dazu die zweidimensionale Ebene, deren Punkte p durch zwei Koordinaten beschrieben werden: $p = (x,y)$. Eine *Metrik* ordnet jedem Paar aus zwei verschiedenen Vektoren $p_1 = (x_1,y_1)$ und $p_2 = (x_2,y_2)$ eine Zahl zu, die wir mit runden Klammern schreiben: $(p_1,p_2)= x_1x_2+y_1y_2$. Man sieht aus der Formel, dass der Wert sich nicht ändert, wenn man die Reihenfolge der Vektoren vertauscht, und wenn die Vektoren zusammenfallen, erhält man nach Pythagoras das Quadrat der Länge der Vektoren. Eine solche Metrik ist auf einer Mannigfaltigkeit nicht von selbst gegeben, sondern muss gewählt werden, und verschiedene Wahlen können zu wesentlich verschiedenen Geometrien führen. Sobald aber eine Metrik gewählt ist, kann man auch von der Länge einer Kurve, von Volumina oder Krümmung reden. Im Gegensatz dazu sieht eine *symplektische* Struktur in der Ebene so aus: Wieder ordnen wir jedem Paar von Vektoren eine Zahl zu, die wir zur Unterscheidung mit eckigen Klammern schreiben: $[p_1,p_2]=x_1y_2-x_2y_1$. Diese Zahl wechselt bei Vertauschung von p_1 und p_2 das Vorzeichen und verschwindet sogar ganz, wenn man für p_1 und p_2 denselben Vektor einsetzt. Schon daran sieht man, dass Metrik und symplektische Struktur wenig gemeinsam haben. Auch für die symplektische Struktur gibt es eine anschauliche geometrische Deutung: es ist der (orientierte) Flächeninhalt des von p_1 und p_2 aufgespannten Parallelogramms.

Phasenräume, wie die oben beschriebenen, tragen alle eine kanonische symplektische Struktur. Tatsächlich ist die Theorie der symplektischen Strukturen aus der hamiltonschen Beschreibung der klassischen Mechanik entstanden. Eine zweite Quelle, aus der sich die Theorie in ihrer Frühgeschichte nährte, ist die geometrische Optik.

Es gibt weitere geometrische Strukturen. Wichtig ist für uns der Begriff der komplexen Struktur, auf den ich nicht weiter eingehen kann als zu sagen, dass ‚komplex' hier nicht im Sinne von ‚kompliziert' steht, sondern im Gegensatz zu ‚reell'. Schließlich lassen sich diese Strukturen kombinieren. Gewisse Kombinationen von metrischen und komplexen Strukturen werden als Kählerstrukturen (nach Erich Kähler, 1906 – 2000) bezeichnet, und gewisse komplexe Varianten von symplektischen Strukturen liefern die holomorph symplektischen Mannigfaltigkeiten, die im Zentrum unserer Untersuchungen stehen.

Das Interesse an holomorph symplektischen Mannigfaltigkeiten ergibt sich primär aus rein innermathematischen Fragestellungen. Die Verbindung zu außermathematischen Fragen, etwa in der Kryptographie oder der Stringtheorie, ist indirekt. Am Institut für Mathematik der Universität Mainz werden holomorph symplektische Mannigfaltigkeiten im Rahmen von mehreren Teilprojekten des DFG Sonderforschungsbereichs/Transregio 45 „Perioden, Modulräume und Arithmetik algebraischer Varietäten" untersucht. Dabei geht es zum einen um die charakteristischen Eigenschaften symplektischer Mannigfaltigkeiten und zum anderen um deren Klassifikation: Gibt es über die uns bekannten Beispiele hinaus neue symplektische Mannigfaltigkeiten? Können wir gar einen Überblick über alle möglichen symplektischen Mannigfaltigkeiten gewinnen? Wie können wir entscheiden, ob zwei gegebene symplektische Mannigfaltigkeiten gleich (isomorph) sind oder nicht?

Um die innermathematischen Zusammenhänge zu motivieren, gehen wir auf die Bilder der zweidimensionalen geschlossenen Flächen zurück. Diese sind vollständig durch ihr Geschlecht g klassifiziert, das ist die Anzahl der Löcher in der Bretzelfläche (Abb. 3).

Die möglichen Werte von g sind 0,1,2,... . Bei näherem Hinsehen stellt es sich allerdings als zweckmäßig heraus, diese unendlich vielen Flächen grob in drei Klassen einzuteilen: Die mit Geschlecht 0 (also die sphärischen), die mit Geschlecht 1 (das sind die torischen) und den ganzen Rest. Zum Beispiel sind Sphären positiv gekrümmt, dagegen Tori flach und alle Flächen vom Geschlecht $g > 1$ negativ gekrümmt. Dass ein Torus flach, also nicht gekrümmt ist, ist aus der Abbildung nicht ersichtlich, wird aber vielleicht durch das folgende Gedankenexperiment plausibler. Wir starten mit einem Quadrat ABDC und verkleben (in Gedanken) zunächst die Kante AC mit der Kante BD und anschließend (in Gedanken) den entstandenen oberen Kreis AB mit dem unteren Kreis CD. Beim Verkleben entsteht im ersten Schritt eine zylindrische Röhre, im zweiten Schritt ein Torus (Abb. 4).

Um Geometrie auf dem Torus zu betreiben, ist aber das wirkliche Verkleben im Raum gar nicht nötig. Es genügt, mit dem flachen Quadrat zu arbeiten und die Verklebevorschrift im Kopf zu behalten: Eine Ameise, die versucht, über den rechten Rand zu krabbeln, lassen wir einfach am linken Rand wieder erscheinen, und dasselbe machen wir mit dem oberen und dem unteren Rand. Frühe Computerspiele verwendeten gelegentlich diese Geometrie: Die Welt war der Bildschirm, und was auch immer den linken Bildschirmrand erreichte, verschwand nicht einfach, sondern erschien am rechten Rand erneut. Die hypothetische Ameise wird zwangsläufig den Eindruck gewinnen, auf einer zweidimensionalen Welt ohne Rand zu leben. Diese Welt hat zwar keinen Rand, ist aber trotzdem begrenzt.

Interessanterweise kann die Ameise auf einfache Weise entscheiden, ob sie auf einer Kugeloberfläche, einem Torus oder einer der anderen Bretzelflächen lebt. Dazu muss sie nicht auf den Mond fliegen, um von außen auf ihre blaue Welt hinabzublicken. Es würde genügen, die Welt mit einem Gitternetz aus Vielecken zu überziehen und die Zahl E-K+F zu bilden, worin E, F und K die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen des Netzes bezeichnen: Für eine Kugel würde stets 2 herauskommen, bei einem Torus stets 0 und allgemeiner bei einer Fläche vom Geschlecht g die Zahl 2-2g. Diese Zahl, die Eulercharakteristik (nach Leonard Euler, 1707-1783), ist das einfachste Beispiel einer geometrischen Invariante einer Mannigfaltigkeit.

Flächen vom Geschlecht 1 sind in vielerlei Hinsicht die interessantesten Flächen. Was die Topologen einen Torus nennen, ist für einen Geometer oder Algebraiker eine sogenannte elliptische Kurve (keine Ellipse! Der Zusammenhang zu Ellipsen ist komplizierter). Elliptische Kurven sind durch Gleichungen der Form

Abb.: © M. Lehn

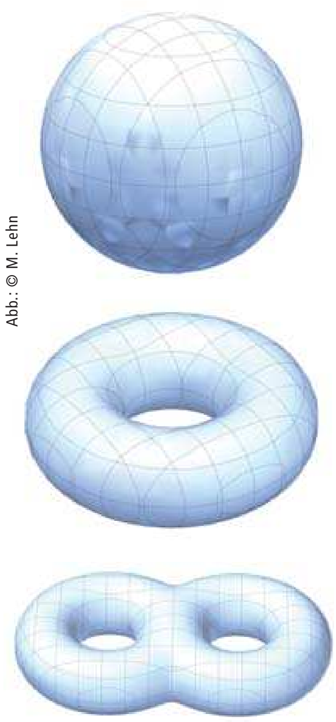

Abb. 3: Flächen vom Geschlecht g=0, g=1 und g=2 (von oben nach unten).

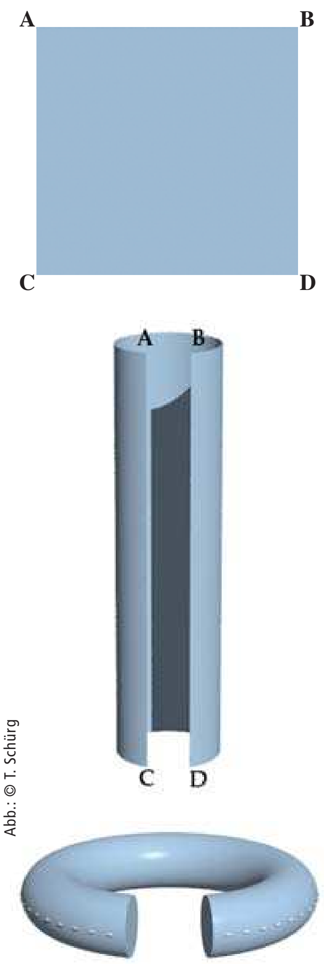

Abb.: © T. Schürg

Abb. 4: Ein Torus (unten) entsteht aus einem flachen Quadrat durch zweifaches Aufrollen und Zusammenkleben.

$y^2=x^3-x+4$ gegeben. Mit den Punkten einer elliptischen Kurve kann man rechnen wie mit Zahlen. Sie spielen eine große Rolle in der Kryptographie und in der Zahlentheorie.

Das Phänomen der Dreiklassenteilung kann man auch bei Kählermannigfaltigkeiten höherer Dimension beobachten. Immer gibt es eine besondere Klasse, die auf der Scheidelinie zwischen (grob gesprochen) positiven und negativen Mannigfaltigkeiten liegt. Genauer handelt es sich um die Klasse der Ricci-flachen Kählermannigfaltigkeiten (nach dem italienischen Mathematiker Ricci-Curbastro, 1853-1925). Diese Mannigfaltigkeiten haben immer eine gerade Dimension. Im Falle der Dimension 2 handelt sich um die oben besprochenen Tori. In der Dimension 4 zerfällt die Klasse in zwei „Gattungen": nämlich vierdimensionale Tori und sogenannte K3-Flächen (vgl. den Artikel von A. Sarti in diesem Heft). In noch höheren Dimensionen zerfällt die Klasse der Ricci-flachen Kählermannigfaltigkeiten schließlich in drei Gattungen: die höherdimensionalen Tori, die sogenannten Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten und die bereits angesprochenen holomorph symplektischen Mannigfaltigkeiten.

Unsere Kenntnisse über die drei Gattungen von Ricci-flachen Kählermannigfaltigkeiten sind sehr unterschiedlich: Tori sind gut untersucht. Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten sind für ein Teilgebiet der Theoretischen Physik, die Stringtheorie, von großem Interesse: Einige stringtheoretische Modelle beschreiben die Welt als eine zehndimensionale Mannigfaltigkeit mit vier ausgedehnten Dimensionen (drei Raumdimensionen und die Zeit) und sechs weiteren in sich gekrümmten Dimensionen, die nur auf einer Längenskala wirksam werden, die noch weit unter der Größe eines Elektrons liegt. Theoretische Physiker haben inzwischen zirka eine Million solcher Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten gefunden. Eine umfassende Theorie fehlt völlig. Umgekehrt weiß man über holomorph symplektische Mannigfaltigkeiten sehr viel, aber leider nicht, wie viele es gibt oder vielleicht auch nicht gibt.

In unserer Arbeitsgruppe gehen wir das Problem von zwei Seiten an: Zum einen soll versucht werden, neue Beispiele zu konstruieren. Die Grundlage dafür sind singuläre Varietäten, etwa von der Art des Doppelkegels, die im Gegensatz zu Mannigfaltigkeiten auch singuläre, also nicht glatte Punkte haben dürfen. Es ist sehr viel leichter, singuläre symplektische Varietäten zu konstruieren, als symplektische Mannigfaltigkeiten. Die Strategie besteht darin, vorhandene Singularitäten durch Prozesse, die in einem technisch genau definierten Sinne ‚Auflösung' und ‚Glättung' heißen, behutsam zu entfernen, ohne dass die symplektische Struktur leidet. Leider ist dies nicht immer möglich, und eine Teilaufgabe besteht darin, eine Hindernis- oder Obstruktionstheorie zu entwickeln, mit der man prinzipiell entscheiden kann, ob eine Auflösung oder Glättung möglich ist. In jüngster Zeit wurde durch den japanischen Mathematiker Y. Namikawa ein Ergebnis dieser Art erzielt. Er zeigte, dass eine Auflösung genau dann möglich ist, wenn auch eine Glättung möglich ist. Beide Prozesse führen also notwendig auf dieselben Hindernisse. Die Rohmodelle für die singulären Varietäten stammen aus einem anderen Bereich der algebraischen Geometrie, der Theorie der sogenannten Modulräume; hier wird die Einordnung des Projektes in die Struktur des oben genannten SFB/TR 45 deutlich. Zugleich sollen von der entgegengesetzten Seite her Methoden entwickelt werden, symplektische Mannigfaltigkeiten sozusagen zu bändigen, sie in gewisse Strukturmodelle zu zwängen und so einer Klassifikation näher zu kommen. Das im Augenblick erfolgversprechendste Konzept ist die Suche nach Lagrangefaserungen. Das sind Varianten von vollständig integrablen Systemen, einem Begriff aus der klassischen Mechanik, womit sich der Kreis schließt.

Eine Bemerkung zum Schluss: Es mag auffallen, dass ich über symplektische Mannigfaltigkeiten schreibe, als handele es sich um den tasmanischen Beutelwolf, von dem ich gern wissen würde, ob er ausgestorben ist oder nicht. Was meint ein Mathematiker, wenn er davon spricht, ein gewisses Objekt wie etwa eine symplektische Mannigfaltigkeit mit einer bestimmten Eulercharakteristik existiere oder existiere nicht? An Sonntagen werden fast alle Mathematiker beteuern, sie seien Formalisten aus dem Hause David Hilberts: Wir manipulieren Symbolketten nach konsistenten logischen Regeln ohne innere Bedeutung. Unter der Woche legen wir den Sonntagsglauben ab und sind heimlich oder offen eingestanden Platonisten: Die Dinger gibt es wirklich da draußen, und ihre Eigenschaften sind gänzlich unabhängig davon, ob wir hingucken oder nicht. Wir müssen nur schlau genug sein, uns leise heranschleichen und am besten die ersten sein, die ein gutes Photo schießen.

Summary

Holomorphic symplectic manifolds are higher dimensional generalisations of K3-surfaces. They arise naturally as structural building blocks of Ricci-flat Kähler manifolds besides complex tori and Calabi-Yau manifolds. Though they form large moduli spaces, up to deformation, only two series and two sporadic examples are known. Our research aims at constructing examples of new topological types with the ultimate goal of a complete classification.

Prof. Dr. Manfred Lehn

Manfred Lehn studierte in Göttingen, an der McMaster University in Hamilton (Kanada) und in Bonn Mathematik und Physik. Er promovierte in Bonn über die Theorie der Modulräume gerahmter Vektorbündel. Es folgten Forschungsaufenthalte in Zürich, Berlin (HU), Bielefeld und Göttingen. Nach seiner Habilitation (Göttingen 1998) mit einer Arbeit über die Kohomologieringstruktur von Hilbertschemata war er als Hochschuldozent an der Universität zu Köln tätig und wurde 2002 Professor für Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität.

Kontakt

Prof. Dr. Manfred Lehn
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
D-55099 Mainz
Tel. +49 (0) 61 31 - 39 22 832
Email: lehn@mathematik.uni-mainz.de